Neodređeni integral i metode računanja

Matematika 2

Erna Begović Kovač, 2019.

Literatura: I. Gusić, Lekcije iz Matematike 2

http://matematika.fkit.hr

Uvod

- Integral funkcije f označava se

$$\int f(x)dx$$

- Pojam neodređenog integrala je inverzan pojmu derivacije funkcije.
- Neodređeni integral nije jedna funkcija nego skup funkcija (međusobno povezanih).

- Uvodni primjer:
  Odredite funkciju F za koju vrijedi $F'(x) = 2x$.

$$(x^2 + C)' = 2x$$

$$\Rightarrow \int 2xdx = x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Neodređeni integral i primitivna funkcija

Općenito, činjenicu da je $F'(x) = f(x)$ zapisujemo kao

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Svaka od funkcija $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, je **primitivna funkcija** (antiderivacija) funkcije f. Skup funkcija $\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$ je **neodređeni integral** funkcije f.

Uočimo da je

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x),$$

dok je

$$\int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

Tablica integrala

$\int dx = x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln \lvert x \rvert + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg} x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arctg} x + C$	

Napomena vezana uz $\int \frac{1}{x} dx$

Za $x > 0$ vrijedi $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ pa je

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C, \quad x > 0.$$

Za $x < 0$ vrijedi $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ pa je

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C, \quad x < 0.$$

Stoga pišemo

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C, \quad x \neq 0.$$

Napomene o oznakama

- Umjesto $\int 1 dx$ pišemo samo $\int dx$.
- Radi sažetosti zapisa oznaku dx često pišemo u brojniku, npr. $\int \frac{dx}{x}$ umjesto $\int \frac{1}{x} dx$.

Svojstva neodređenog integrala

- Integral zbroja jednak je zbroju integrala

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

- Integral razlike jednak je razlici integrala

$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx.$$

- Konstanta može izaći ispred integrala

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx.$$

Ova svojstva slijede iz svojstava derivacija

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x) \quad \text{i} \quad (\alpha f(x))' = \alpha f'(x).$$

Primjer 1

$$
\begin{aligned}
&\int \left(3\cos x + \frac{2}{x} - 5x^3 + 4\right)dx \\
&= \int 3\cos x dx + \int \frac{2}{x} dx - \int 5x^3 dx + \int 4 dx \\
&= 3\int \cos x dx + 2\int \frac{1}{x} dx - 5\int x^3 dx + 4\int dx \\
&= (3\sin x + C_1) + (2\ln|x| + C_2) - (5\frac{x^4}{4} + C_3) + (4x + C_4) \\
&= 3\sin x + 2\ln|x| - \frac{5}{4}x^4 + 4x + C
\end{aligned}
$$

Supstitucija

Ako integral $\int f(x)dx$ ne možemo rješiti direktno koristeći tablicu i svojstva integrala, možemo pokušati supstitucijom. Uvrstimo $x = \phi(t)$ pri čemu je funkcija ϕ bijekcija. Imamo

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \left[x = \phi(t), dx = \phi'(t)dt\right] = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt \\ &= g(t) + C = \left[t = \phi^{-1}(x)\right] = g(\phi^{-1}(x)) + C.\end{aligned}$$

Cilj supstitucije je da dobijemo oblik $f(\phi(t))\phi'(t)$ koji znamo integrirati. Bijektivnost funkcije ϕ nužna je za vraćanje s varijable t na polaznu varijablu x.

Primjer 2

- $\int \cos(2x)dx$

Primjer 3

Računanje integrala ako je brojnik derivacija nazivnika

$$\begin{aligned}\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} &= \left[t = f(x), dt = f'(x)dx\right] \\ &= \int \frac{dt}{t} \\ &= \ln|t| + C \\ &= \ln|f(x)| + C\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int \frac{2xdx}{x^2+1}$

Parcijalna integracija

Formula parcijalne integracije

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Izvod:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$
$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x)$$
$$\Rightarrow \int u(x)v'(x)dx = \int (u(x)v(x))'dx - \int u'(x)v(x)dx$$
$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Uvrstimo $v'(x)dx = dv$, $u'(x)dx = du$.

$$\Rightarrow \int u(x)dv = u(x)v(x) - \int v(x)du$$

Primjer 4

Parcijalna integracija

- $\int x \cos x dx$

Primjer 5

Kombinacija parcijalne integracije i supstitucije

- $\int \arcsin x dx$

Zadatci

Riješite integrale

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln x}$
2. $\displaystyle\int \mathrm{tg} x dx$
3. $\displaystyle\int x^2 e^x dx$
4. $\displaystyle\int \ln x dx$